Program Studi Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Mataram

Chapter Book

Wavelet Legendre dan Penerapannya

Sufria Dimi Permadi, Lalu Riski Wirendra Putra

Edisi 1 2024

Daftar Isi

Daftar Isi **i**

1 Pengantar **1**
1.1 Polinomial Legendre 1
1.2 Wavelet Legendre 2

2 Aproksimasi Wavelet Legendre **3**

3 Penerapan Wavelet Legendre **5**
3.1 Analisis Sinyal Periodik 5
3.2 Pemodelan Data Periodik 6
3.3 Analisis Citra 7
3.4 Analisis Numerik 8
3.5 Pemrosesan Sinyal Biomedis 8

4 Kesimpulan **11**

Bibliografi **13**

BAB 1

Pengantar

1.1 Polinomial Legendre

Polinomial Legendre atau bisa juga disebut sebagai fungsi Legendre merupakan suatu solusi persamaan diferensial orde dua yang disebut sebagai persamaan diferensial Legendre. Persamaan diferensial tersebut berupa

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0 \tag{1.1}$$

yang dapat ditulis lebih sederhana menjadi

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + l(l+1)y = 0. \tag{1.2}$$

Jika l merupakan suatu bilangan bulat, maka solusi persamaan diferensial tersebut merupakan suatu polinomial. Polinomial Legendre dengan orde n merupakan suatu fungsi dari interval $[-1,1]$ ke $\mathbb{R}$. Polinomial Legendre dinotasikan dengan $P_m(t)$ dengan m adalah orde dari polinomialnya. $P_m(t)$ mengikuti aturan berikut:

$$P_0(t) = 1, \qquad P_1(t) = t \tag{1.3}$$

$$P_{m+1}(t) = \left(\frac{2m+1}{m+1}\right) tP_m(t) - \left(\frac{m}{m+1}\right) P_{m-1}(t), m = 1,2,3,\ldots \tag{1.4}$$

Dari persamaan 1.3 diperoleh

$$P_0(t) = 1 \tag{1.5}$$

$$P_1(t) = x \tag{1.6}$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \tag{1.7}$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) \tag{1.8}$$

$$P_4(t) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \tag{1.9}$$

$$P_5(t) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x) \tag{1.10}$$

$$P_6(t) = \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5) \tag{1.11}$$

$$\tag{1.12}$$

1.2 Wavelet Legendre

Suatu fungsi $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ dikatakan *mother wavelet* jika memenuhi kondisi *admissibility*. Yakni, jika $\hat{\psi}$ merupakan transformasi Forier dari ψ maka haruslah memenuhi

$$0 \leq C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

Parameter translasi dan dilatasi dari ψ berturut-turut dinotasikan dengan b dan a. Sehingga diperoleh keluarga wavelet yakni

$$\psi_{b,a}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a \neq 0.$$

Jika kita membatasi parameter a dan b pada nilai diskrit yakni $a = a_0^{-k}, b = nb_0 a_0^{-k}, a_0 > 1, b_0 > 0$, dimana $n, k \in \mathbb{N}$, maka kita akan memperoleh keluarga wavelet diskrit

$$\psi_{k,n} = |a|^{\frac{k}{2}} \psi\left(a_0^k t - nb_0\right).$$

Dimana $\psi_{k,n}$ merupakan basis dari $L^2(\mathbb{R})$. Jika $a_0 = 2, b_0 = 1$ maka $\psi_{k,n}$ merupakan basis ortonormal dari $L^2(\mathbb{R})$.

Wavelet Legendre adalah $\psi_{n,m}(t) = \psi(k, \hat{n}, m, t)$ dengan $\hat{n} = 2n - 1, n = 1, 2, \ldots, 2^k - 1, k \in \mathbb{N}$, dan m menyatakan orde dari polinomial Legendre dan t adalah normalisasi dari waktu. Fungsi ψ tersebut merupakan fungsi yang terdefinisi pada selang $[0, 1)$ yang memenuhi

$$\psi_{n,m}(t) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} P_m\left(2^K t - \hat{n}\right) & , \text{ untuk } \frac{\hat{n}-1}{2^k} \leq t < \frac{\hat{n}-1}{2^k} \\ 0 & , \text{ yang lain.} \end{cases}$$

dimana $m = 0, 1, 2, \ldots, M - 1, n = 1, 2, \ldots, 2^{k-1}$.

Dari sini kita bisa mengetahui bahwa *father* wavelet-nya adalah polinomial Legendre P_m dan *mother* wavelet-nya adalah $\psi_{n,m}(t)$.

BAB 2

Aproksimasi Wavelet Legendre

Suatu fungsi $f(x)$ yang terdefinisi pada selang $[0, 1)$ dapat diekspansi dalam bentuk deret wavelet Legendre yakni menjadi

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} \psi_{n,m}(t); \text{ dimana } c_{n,m} = \langle f, \psi_{n,m} \rangle. \tag{2.1}$$

Perhatikan bahwa fungsi yang dapat diekspansi menjadi deret Legendre merupakan fungsi yang terdefinsisi pada selang $[0, 1)$. Sehingga jika kita memiliki suatu fungsi f yang memiliki domain $A \subseteq \mathbb{R}$ faka fungsi tersebut harus dinormalisasi sehingga terbentuk fungsi baru f' yang terdefinisi pada selang $[0, 1)$.

Persamaan 2.1 merupakan aproksimasi yang sangat mendekati fungsi awal. Tetapi sesungguhnya penerapannya tidak seideal itu. Sehingga jika kita ingin membuatnya menjadi diskrit maka persamaan tersebut akan menjadi

$$f(t) \approx= \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{n,m} \psi_{n,m}(t) = C^T \Psi(t), \tag{2.2}$$

dimana C dan $\Psi(t)$ adalah matriks berukuran $2^{k-1}M \times 1$ yakni

$$C(t) = [c_{10}, c_{11}, \ldots, c_{1M-1}, c_{20}, \ldots, c_{2^{k-1}0}, \ldots, c_{2^{k-1}M-1}]^T$$
$$\Psi(t) = [\psi_{10}, \psi_{11}, \ldots, \psi_{1M-1}, \psi_{20}, \ldots, \psi_{2^{k-1}0}, \ldots, \psi_{2^{k-1}M-1}]^T$$

BAB 3

Penerapan Wavelet Legendre

3.1 Analisis Sinyal Periodik

Wavelet Legendre sangat cocok digunakan untuk menganalisis sinyal-sinyal yang bersifat periodik atau memiliki pola tertentu yang sesuai dengan karakteristik polinomial Legendre. Beberapa contoh aplikasinya antara lain analisis gelombang suara, analisis sinyal getaran mekanik, dan analisis sinyal listrik dari rangkaian elektronik.Berikut adalah beberapa artikel hasil penelitian

A Legendre wavelet–based stability prediction method for high-speed milling processes

Penelitian ini mengembangkan metode prediksi stabilitas berbasis wavelet Legendre semi-analitis dalam pemesinan berkecepatan tinggi, yang model dinamikanya umumnya dimodelkan dengan persamaan diferensial tunda waktu-periodik. Pertama-tama, model dinamika milling diubah menjadi persamaan state. Berdasarkan analisis model getaran untuk sistem dinamik milling, periode untuk matriks koefisien dapat dibagi menjadi dua subinterval. Setelah itu, transformasi variabel diperkenalkan untuk mengubah interval getaran paksa menjadi interval definisi standar wavelet Legendre, yang dapat didiskritisasi secara tidak seragam ke dalam titik-titik pengambilan sampel Chebyshev-Gauss-Lobatto. Atas dasar ini, wavelet Legendre seri berhingga digunakan untuk secara akurat mendekati state term, sedangkan turunan dari state term dapat diperoleh secara bersamaan melalui matriks operasional wavelet Legendre yang baru. Dengan menggunakan produk Kronecker dan teori Floquet, matriks transisi pada akhirnya diperoleh untuk memprediksi stabilitas secara semi-analitis. Keunggulan dan keserbagunaan untuk pendekatan yang disajikan divalidasi melalui perbandingan dengan algoritma yang ada. Hasilnya menunjukkan bahwa pendekatan ini memiliki akurasi yang tinggi, kecepatan kalkulasi, dan dapat diterapkan.

Fractionally delayed Legendre wavelet transform based detection and optimal features based classification of voltage sag causes

Makalah ini mengemukakan deteksi dan klasifikasi dari delapan penyebab penurunan tegangan. Pendekatan ini menambah teknik konvensional transformasi wavelet dengan merancang wavelet Legendre yang tertunda fraksional sebagai alat pemrosesan sinyal alat. Karakteristik peristiwa unik dicari dari perkiraan,

dan koefisien sinyal terperinci yang diperoleh dengan menggunakan analisis multiresolusi 4 tingkat. Untuk mencapai tingkat klasifikasi yang lebih tinggi, fitur optimal terbaik dicari di sekitarfitur yang diekstraksi dengan menggunakan algoritma optimasi singa semut. Algoritma ini hanya mempertahankan fitur yang sesuai dengan kriteria kebugaran berdasarkan akurasi klasifikasi dan jumlah fitur. Kumpulan fitur yang representatif diklasifikasikan menggunakanan sam pengklasifikasi yang menggunakan pemungutan suara mayoritas penduduk. Kumpulan pengklasifikasi memiliki tiga anggota yaitu support vector support vector machine, jaringan syaraf tiruan probabilistik, dan jaringan syaraf tiruan multilayer.

3.2 Pemodelan Data Periodik

Wavelet Legendre dapat dimanfaatkan untuk memodelkan data yang memiliki pola periodik atau siklik. Misalnya dalam pemodelan data cuaca, data astronomi, atau data lainnya yang berulang secara periodik.

Using orthogonal Legendre polynomials to parameterize global geophysical optimizations: Applications to seismic-petrophysical inversion and 1D elastic full-waveform inversion

Pendekatan polinomial Legendre untuk melakukan pemerolehan ulang inversi geofisika yang diselesaikan melalui partikel swarm optimization (PSO). Model bawah permukaan diperluas menjadi serangkaian polinomial Legendre yang digunakan sebagai fungsi dasar. Dalam kerangka kerja ini, parameter yang tidak diketahui menjadi serangkaian koefisien ekspansi yang terkait dengan setiap polinomial. Tujuan dari parameterisasi khusus ini adalah tiga kali lipat: Secara efisien mengurangi jumlah yang tidak diketahui, yang secara inheren memaksakan spasial 1D spasial 1D pada model bawah permukaan yang dipulihkan dan mencari parameter yang terpisah secara maksimal. Pendekatan yang diusulkan diterapkan pada dua masalah optimasi geofisika yang sangat non-linear: Inversi seismik-petrofisika, dan inversi bentuk gelombang penuh elastis 1D. Dalam penelitian ini, dengan tujuan untuk menjaga diskusi pada tingkat yang sederhana, kami membatasi perhatian pada data seismik sintetik. Strategi ini memungkinkan peneliti untuk menarik kesimpulan umum tentang kesesuaian parameterisasi khusus untuk memecahkan masalah geofisika. Hasilnya menunjukkan bahwa pendekatan yang diusulkan memastikan kecepatan tingkat konvergensi yang cepat bersama dengan prediksi model akhir yang akurat dan stabil.

Statstical Analysis by Wavelet Leaders Reveals Differences IN Multi-Fractal Charateristics Of Stock Price and Return Series In Turkish High Frequency Data

Penelitian ini menerapkan sekumpulan besar saham Turki dan hasil statistik dilakukan untuk memeriksa keberadaan multi-fraktal dalam seri harga dan pengembalian dan perbedaan antara harga dan pengembalian dalam hal multi fraktal. Hasil statistik kami menunjukkan bukti kuat bahwa data harga dan pengembalian frekuensi tinggi menunjukkan dinamika multi fraktal. Selain itu, mereka menunjukkan bukti karakteristik fraktal yang berbeda pada skala yang

berbeda antara seri harga dan return. Lebih jauh lagi, hasil statistik kami menunjukkan bukti perbedaan karakteristik fluktuasi lokal dari harga dan deret waktu pengembalian harga dan deret waktu pengembalian dimana Spektrum multi fraktal diperoleh dengan transformasi Legendre dari eksponen skala.

Short-time wind speed prediction based on Legendre multi-wavelet neural network

Makalah ini mengusulkan model jaringan saraf berbasis multiwavelet Legendre untuk prediksi kecepatan angin non-linear. Model ini menggabungkan sifat-sifat yang sangat baik dari multiwavelet Legendre dengan kemampuan belajar mandiri dari jaringan syaraf, yang memiliki dukungan teori matematika yang ketat. Jaringan ini mempelajari pasangan data input-output dan membagi bobot dalam subinterval yang terbagi, yang dapat sangat mengurangi biaya komputasi. Kami mengeksplorasi keefektifan multi-wavelet Legendre sebagai fungsi aktivasi. Sementara itu, metode ini berhasil diterapkan pada prediksi kecepatan angin.

3.3 Analisis Citra

Sifat ortonormal dari wavelet Legendre membuatnya dapat digunakan untuk melakukan analisis citra guna untuk ekstraksi fitur dalam pengenalan pola citra. Berikut artikel hasil penelitian

Comparing the Legendre Wavelet filter and the Gabor Wavelet filter For Feature Extraction based on Iris Recognition System

Penelitian ini mempertimbangkan filter wavelet Legendre, yang merupakan salah satu yang paling banyak digunakan dan filter Gabor. Penelitian ini menerapkan tiga set data yang berbeda; CASIA, UBIRIS dan MMU basis data CASIA, UBIRIS dan MMU. Kemudian mengevaluasi dan membandingkan berdasarkan False Tingkat Penerimaan Salah (FAR), Tingkat Penolakan Salah (FRR), Tingkat Tingkat Penerimaan Asli (GAR) dan akurasinya. Hasilnya menunjukkan peningkatan yang signifikan dalam akurasi pengenalan dari filter wavelet Legendre filter wavelet Legendre terhadap filter Gabor dengan selisih hingga 5,4%. Filter Wavelet Legendre dibandingkan dengan filter Wavelet Gabor Filter Wavelet berdasarkan efisiensi dan akurasi operasi dan peningkatan yang signifikan tercapai. Pengembangan medtode pada penelitian ini adalah membandingkan filter Legendre Wavelet dengan filter ekstraksi fitur lainnya.

Fingerprint Enhancement Based on Tensor of Wavelet Subbands for Classification

Penelitian ini mencoba mengekstrak fitur dari gambar sidik jari dan kemudian menggunakannya untuk pemodelan atau pembelajaran sebelum rekonstruksi untuk mendapatkan gambar yang disempurnakan. Menggunakan beberapa polinomial Legendre untuk menentukan pola orientasi global sidik jari gambar dan merekonstruksi bidang orientasi sesuai dengan struktur sidik jari. Mereka kemudian menyempurnakan gambar dengan menggunakan estimasi gradien.

Picture quality and compression analysis of multilevel legendre wavelet transformation based image compression technique

Dalam makalah ini, transformasi citra dilakukan dengan menggunakan wavelet Legendre . Hasil eksperimen telah dianalisis dan dibandingkan dalam hal ukuran kualitatif dan kuantitatif yaitu PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) dan bpp (bit per pixel). Kinerja algoritma yang diusulkan dibandingkan dengan algoritma kompresi gambar berbasis transformasi wavelet Haar yang sudah ada, kompresi berdasarkan metode transformasi, DCT dan kompresi berbasis pemindaian adaptif dan kompresi JPEG. Kualitas gambar yang dicapai dalam percobaan dengan jelas menunjukkan bahwa teknik kompresi gambar berbasis transformasi wavelet Legendre yang berorientasi pada transformasi gambar yang diusulkan sangat mengungguli teknik kompresi yang disebutkan di atas.

3.4 Analisis Numerik

Wavelet Legendre juga dapat diaplikasikan dalam analisis numerik, seperti dalam metode elemen hingga atau metode volume hingga untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial yang melibatkan fenomena periodik.

Application of Legendre wavelets for solving fractional differential equations

Dalam makalah ini [1] peneliti membuat kerangka kerja untuk mendapatkan perkiraan solusi numerik untuk persamaan diferensial biasa (ODE) yang melibatkan turunan orde pecahan menggunakan Aproksimasi wavelet Legendre. Hasil menunjukkan bahwa ini teknik ini dapat menyelesaikan persamaan diferensial biasa pecahan linier dan nonlinier dengan kesalahan yang dapat diabaikan dibandingkan dengan solusi eksak

Legendre wavelets direct method for variational problems

Artikel ini fokus pada bagaimana pendekatan wavelet Legendre untuk menyelesaikan masalah variational secara numerik dengan mengubahnya menjadi serangkaian persamaan aljabar dan kesimpulan pada artikel ini adalah matriks operasional wavelet Legendre P, bersama dengan integrasi dari hasil kali dua vektor wavelet Legendre, digunakan untuk menyelesaikan masalah variasi. Metode ini mengurangi variasi masalah variasional menjadi satu set persamaan aljabar. Integrasi dari hasil kali dua fungsi wavelet Legendre merupakan matriks identitas, sehingga membuat wavelet Legendre secara komputasi sangat menarik.

3.5 Pemrosesan Sinyal Biomedis

Dalam bidang biomedis, wavelet Legendre berpotensi digunakan untuk menganalisis sinyal-sinyal periodik seperti sinyal EEG, ECG, atau sinyal biomedis lainnya untuk keperluan diagnosis penyakit. Berikut beberapa artikel hasil penelitian

Legendre polynomial modeling of time-varying delay applied to surface EMG signals—Derivation of the appropriate time-dependent CRBs

Dalam penelitian ini, masalah estimasi TVD dipertimbangkan dengan menggunakan metode parametrik baru. Pertama, kami mengusulkan pemodelan polinomial TVD. Model ini dinyatakan dalam basis polinomial ortonormal.

BAB 4

Kesimpulan

Wavelet Legendre adalah alat analisis matematis yang sangat baik untuk banyak aplikasi yang membutuhkan data berulang dan fungsi periodik. Sifat ortonormal wavelet Legendre memungkinkan dekomposisi dan rekonstruksi sinyal dengan efektif. Selain itu, dalam analisis sinyal periodik, wavelet Legendre terbukti mampu memberikan prediksi stabilitas yang akurat dan efektif dalam pemrosesan sinyal mekanik dan listrik. Wavelet Legendre juga membantu menghasilkan model yang lebih tepat dan representatif dalam pemodelan data periodik, seperti data cuaca dan astronomi.

Wavelet Legendre juga berhasil dalam analisis citra dan pemrosesan sinyal biomedis. Sifat ortonormalnya memungkinkan pengenalan pola citra yang lebih baik, seperti pada sistem pengenalan iris dan gambar sidik jari yang lebih baik. Wavelet Legendre, yang meningkatkan efisiensi komputasi secara signifikan, dapat menyelesaikan masalah variasional dalam analisis numerik dengan mengubahnya menjadi serangkaian persamaan aljabar. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode berbasis wavelet Legendre meningkatkan akurasi analisis dan mengurangi biaya komputasi, menjadikannya alat yang sangat berguna dalam berbagai aplikasi ilmiah modern.

Bibliografi

[1] Jafari, H., Yousefi, S. A., Firoozjaee, M., Momani, S. **and** Khalique, C. M., **?**Application of Legendre wavelets for solving fractional differential equations,**?** *Computers & Mathematics with Applications*, **jourvol** 62, **number** 3, **pages** 1038–1045, 2011.